Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение   
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт Информационных технологий, математики и механики

Отчёт по лабораторной работе

**Численное** **решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных**

Выполнил:

  студент гр. 381806-01

Алибеков М.Р.

Проверил:

  Доцент каф. ДУМЧА, ИИТММ

Эгамов А.И.

Нижний Новгород

2021 г.

**Содержание**

[1. Введение 3](#_Toc72137895)

[2. Постановка задачи 4](#_Toc72137896)

[3. Теоретическая основа 5](#_Toc72137897)

[**3.1** **Описание управляемого процесса** 5](#_Toc72137898)

[**3.2** **Решение задачи** 6](#_Toc72137899)

[4. Руководство пользователя 8](#_Toc72137900)

[5. Заключение 12](#_Toc72137901)

[6. Литература 13](#_Toc72137902)

1. **Введение**

Лабораторная работа направлена на изучение вопроса численного решения начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

Основа большинства физических законов сформулирована в терминах дифференциальных уравнений, а потому они являются одним из важнейших инструментов математического моделирования. Законы Ньютона в механике и уравнения Максвелла в теории электромагнитного поля, законы Кирхгофа в теории электрических цепей и уравнение Шредингера в квантовой механике, а также многие другие дифференциальные уравнения или их системы составляют ядро математического аппарата физических исследований.

Зачастую, аналитическое решение некоторых наиболее интересных дифференциальных уравнений, к сожалению, невозможно, и, в связи с этим, приходится прибегать к численным решениям ДУ, в том числе, и к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

Непосредственно в данной лабораторной работе рассматривается управляемый процесс нагревания стержня: дан тонкий однородный стержень с теплоизолированными концами длины . На процесс изменения температуры стержня осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей, например, через стержень пропускается электрический ток. Математическая модель данного процесса будет рассмотрена в теоретической части данной работы.

В ходе данной лабораторной работы требуется: построить математическую модель процесса, вывести способ вычисления температуры стержня и реализовать данный метод в виде программного комплекса с «дружелюбным» графическим пользовательским интерфейсом.

1. **Постановка задачи**

В рамках лабораторной работы ставится задача реализации программного комплекса с графическим пользовательским интерфейсом (на одном из языков программирования высокого уровня), который позволит находить численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

Программный комплекс должен обладать следующими возможностями:

* Возможность задания и изменения:
  + длину стержня
  + времени
  + шага в разностной схеме по координате
  + шага в разностной схеме по координате
  + констант
* Возможность вывода на экран:
  + строки прогресса и времени выполнения данной работы
  + графика функции – синим цветом
  + графика найденной функции – красным цветом
  + графика решения части A – зелёным цветом
* Нахождение решения при других параметрах начальных функций без перезапуска программы.
* Вычисление решения начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных. При этом должно использоваться 2 варианта функций управления с обратной связью.
* Численное интегрирования различных функций методом Симпсона.
* Вычисление решения начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных.

*Замечание:* должно использоваться 2 варианта функций управления с обратной связью (часть A и часть B).

Очевидно, для работы с численным интегрированием методом Симпсона и методом прогонки с трехдиагональными матрицами должны быть представлены отдельные независимые модули. Также для удобства целесообразно иметь некий класс, содержащий в себе функции и .

Программное решение должно выглядеть приблизительно следующим образом:

1. Модуль MainForm – поддержка GUI (графического пользовательского интерфейса) для работы с программой.
2. Модуль HeatGrid – комплексное осуществление работы с математической моделью процесса и способа вычисления температуры стержня.
3. Модуль SimpsonMethod – статический класс, предоставляющий возможность численного интегрирования по формуле Симпсона.
4. Модуль TridiagonalMatrix – возможность работы с трехдиагональными матрицами и решением СЛАУ специального вида методом прогонки.
5. Модуль Functions – класс, содержащий в себе функции и .
6. **Теоретическая основа**

# **Описание управляемого процесса**

В рамках данной задачи будет рассмотрена математическая модель процесса нагревания тонкого однородного стержня с теплоизолированными концами длины .

На множестве ; будем искать функцию – температуру стержня – непрерывно дифференцируемую по и дважды дифференцируемую по – решение уравнения:

удовлетворяющее однородным граничным условиям второго рода (т.к. у стержня теплоизолированные концы):

и начальному условию:

где – константа, функция задает начальное распределение температуры, дважды непрерывно дифференцируема на отрезке и удовлетворяет условиям согласования и условию:

Непрерывная функция – управление с обратной связью, которое представляется в одном из вариантов:

где – управляющая функция, непрерывная на отрезке .

В данной лабораторной работе предлагается взять следующие функцию начального распределения температуры и управляющую функцию:

где ‒ некие константы.

В результате работы необходимо получить изменение начальной кривой с течением времени, которое описывается дифференциальным уравнением .

# **Решение задачи**

Первым шагом решения будет составление неявной разностной схемы с погрешностью для уравнений и .

Для этого сначала построим в области равномерную сетку:

Краевую задачу аппроксимируем при помощи замены дифференциальных операторов на следующие разностные операторы:

и подставим в :

где , а интеграл для каждого слоя рассчитываем по формуле Симпсона:

Сделаем следующую замену:

Тогда:

Получили неявную сеточную схему:

Можно заметить, что значения можно найти методом прогонки:

Тогда неявная сеточная схема приобретает следующий вид:

Но не стоит забывать о граничных условиях . Заменим эти дифференциальные операторы на центральные разностные производные с погрешностью второго порядка:

Тогда для нулевого слоя получаем:

А для последнего слоя:

Собрав все уравнения воедино получим матрицу:

Или, что тоже самое:

Получаем СЛАУ (систему линейных алгебраических уравнений) .

Зная решение нулевого слоя (начальные условия), можно заполнить первый слой. Зная первый -второй. И так далее, итеративно будем рассчитывать слои. То есть, постоянно добавляя в правую часть системы решение предыдущего слоя, можно находить решение следующего слоя.

Решение этой задачи можно также получить, если взять в качестве функции управления с обратной связью функцию , а не .

В том случае, если возьмем в качестве функции управления с обратной связью функцию , а не , проведя аналогичные действия получим функцию (аналог функции , получаемой при рассмотрении (6))

Методом Симпсона найдём значение следующего интеграла:

Поделив на интеграл , вычисляемый для последнего слоя:

мы сможем получить решение этой же задачи. Именно этот метод в данной лабораторной работе именуется “Частью A”, а выражение ‒ решением части A.

1. **Руководство пользователя**

При запуске программы перед пользователем появляется интерфейс управления (см. Рисунок 1):

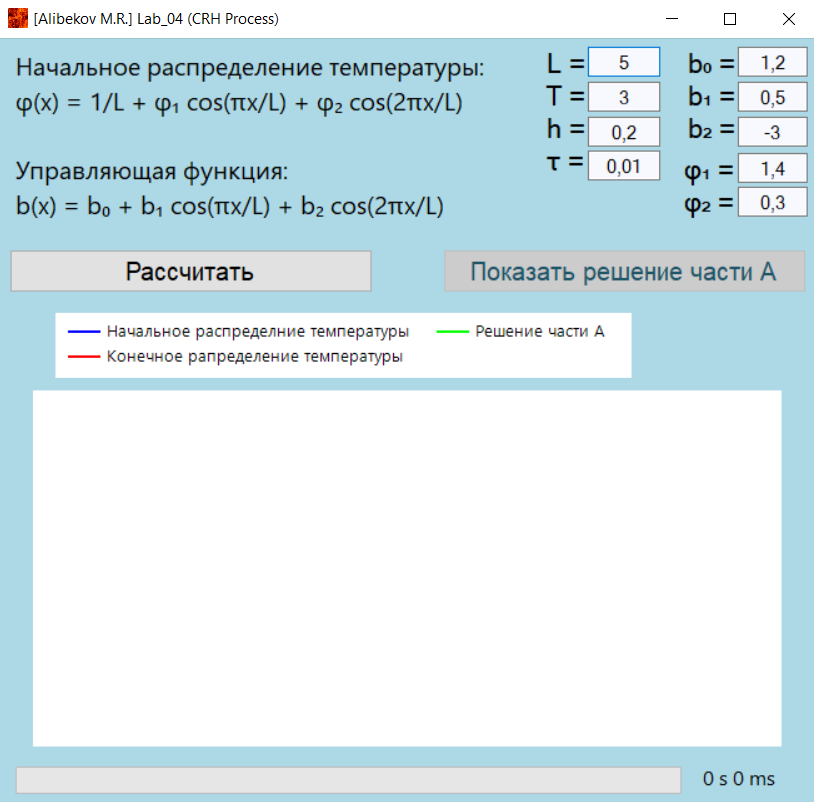


Рисунок 1. Окно приложения

После запуска можно заметить большое пустое поле в нижней области приложения. Именно в этой области будут вырисовываться графики начальной температуры, конечной температуры и график решения части A. В верхней области располагаются данные о начальных условиях, включающие в себя вид функций распределения начальных условий и форматируемые поля для непосредственного задания параметров (длины стержня , времени , шага в разностной схеме по координате , шага в разностной схеме по координате , констант ). В самом внизу можно заметить строку прогресса и время выполнения расчетов (по умолчанию стоит 0 секунд и 0 миллисекунд).

При заданных параметрах можно рассчитать температуру, нажав кнопку “Рассчитать”. После нажатия на кнопку строка прогресса постепенно, по мере выполнения вычислений будет заполняться, а по результатам вычислений в белой области в нижней части приложения появятся графики начального (синяя линия) и конечного (красная линия) распределения температур стержня, «активируется» кнопка “Показать решение части A”, а рядом со строкой прогресса появится время выполнения вычислений (в секундах и миллисекундах). (см. Рисунок 2).

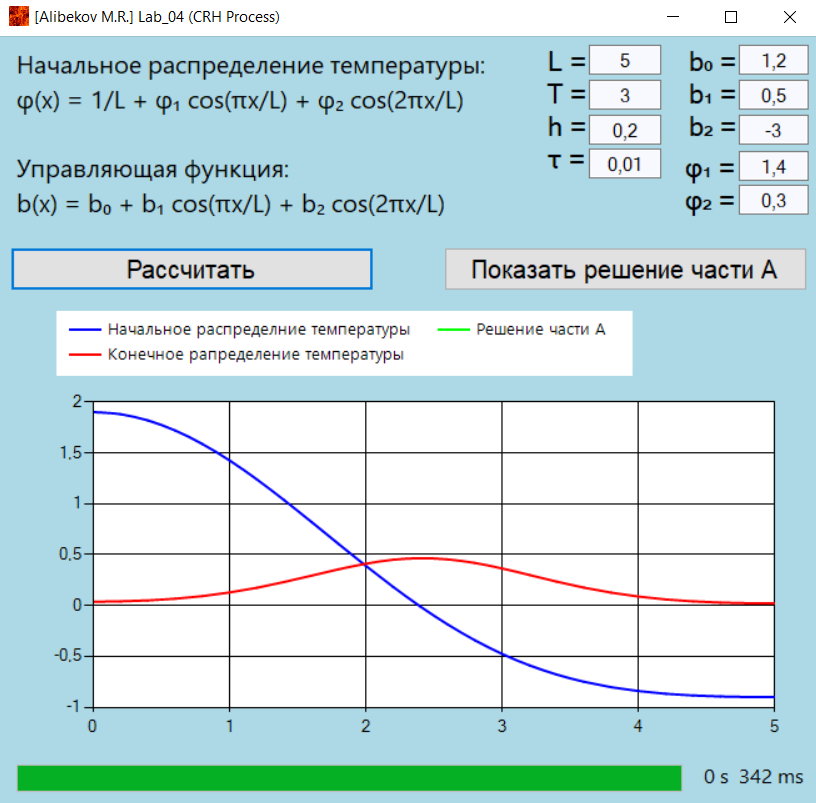


Рисунок 2. Расчёт и построение графиков распределения температур

При нажатии на кнопку “Показать решение части A” происходит перерасчет с учетом другой функции управления с обратной связью. При этом строка прогресса обнулится, а затем снова постепенно, по мере выполнения вычислений будет заполняться, а по результатам вычислений в белой области в нижней части приложения поверх уже прорисованных графиков появится новый график конечного распределения температуры в виде линии зеленого цвета, значение времени рядом со строкой прогресса обновится с учетом времени выполнения новых расчетов, а кнопка “Показать решение части A” поменяется на “Скрыть решение части A”. (см. Рисунок 3).

В виду того, что решения с разными функциями управления с обратной связью приблизительно схожи, зачастую красная линия будет затмеваться зеленой линией.

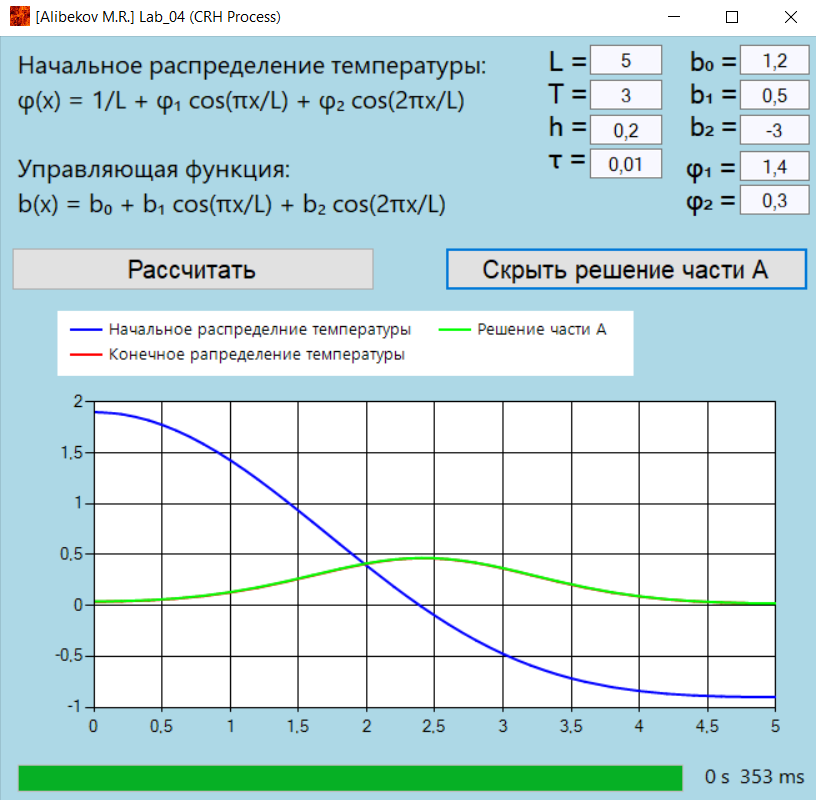


Рисунок 3. Построение графика решения части A

При нажатии на кнопку “Скрыть решение части A” все вернется в состояние до нажатия кнопки “Показать решение части A”, а в частности исчезнет график решения части A (линия зеленого цвета), и кнопка “Скрыть решение части A” поменяется на “Показать решение части A”. (см. Рисунок 4).

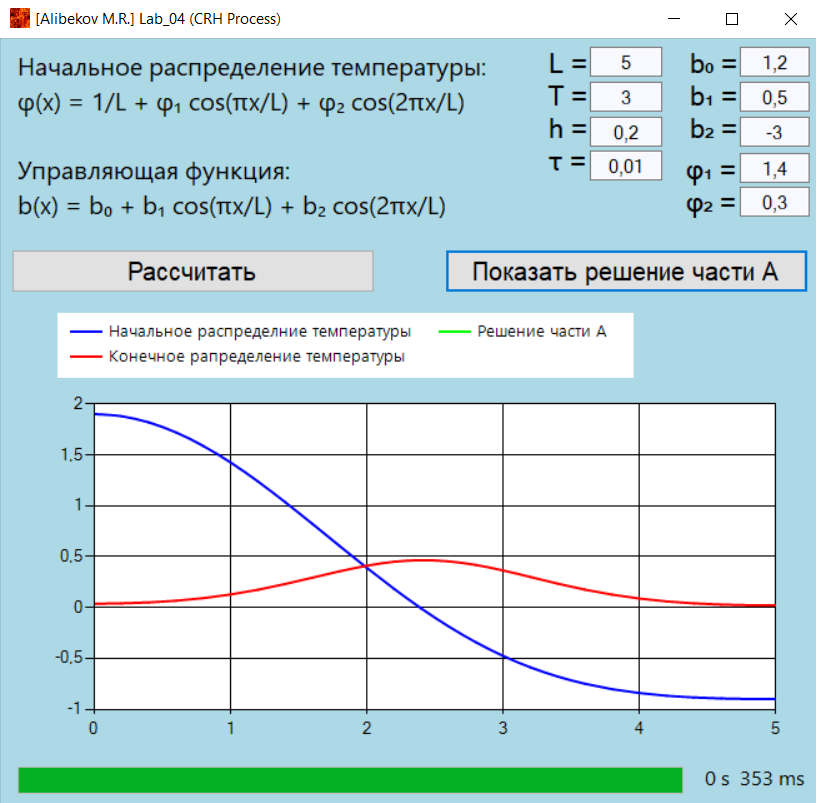


Рисунок 4. Сокрытие графика решения части A

1. **Заключение**

В результате лабораторной работы был разработан программный комплекс на языке C#, позволяющий позволяет найти численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных на примере задачи вычисления температуры тонкого однородного стержня с теплоизолированными концами при нагревании.

В результате работы программы выполняется поиск решения с учетом начальных данных (линия синего цвета), задаваемых пользователем вручную и последующее её отображение на экране в графическом виде (линией красного цвета). Также присутствует возможность использовать второй вариант функции управления с обратной связью (часть A (линия зеленого цвета)).

Также в ходе экспериментов сравнили результирующие решения, полученные использованием разных вариантов функций управления с обратной связью. И на основе данной лабораторной работы можно сделать некоторые выводы, касающихся решения части B:

* На концах отрезка в силу график функции численного решения имеет горизонтальные касательные.
* Площадь фигуры, где график функции выше, чем равна площади фигуры, где функция ниже, чем .
* При замене функции на , где ‒ некоторая константа, функция не изменяется.
* Зеленый график находится «близко» к красному.

В результате, цели, поставленные в данной лабораторной работе, были успешно достигнуты.

1. **Литература**
2. Герберт Шилдт. C# 4.0: Полное руководство: OOO “И.Д. Вильямс”, 2011 – 1056 с.
3. Эгамов А.И. Лабораторная работа «Численное решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных: учебно-метод. пособие / А.И. Эгамов. ‒ Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2019. – 15 с
4. Э.Г. Позняк, В.А. Ильин. Основы Математического анализа. Часть 2. ‒ Москва: Физматлит, 2002. 464с.
5. А.Н. Тихонов, A.A. Самарский. Уравнения математической физики. ‒ М.: Наука, 1979. 799c.
6. A.A. Самарский. Введение в численные методы. ‒ СПб.: Лань, 2005. 288с.
7. Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса: учеб. пособие. – Томск : STT, 2016. – 92 с.
8. И.С. Березин, Жидков Н.П. Методы вычислений Т.2. ‒ М.: ГИФМЛ, 1959. 620с.